

# Qu'est-ce que le spin ? Introduction aux qubits

Ruslan Maksimau

CY Cergy Paris Université

Exposé au groupe de travail Calculs quantiques topologiques

## Introduction

Un **bit** ne peut prendre que deux valeurs : 0 et 1. L'état d'un **qubit** est une combinaison linéaire de ces deux états :

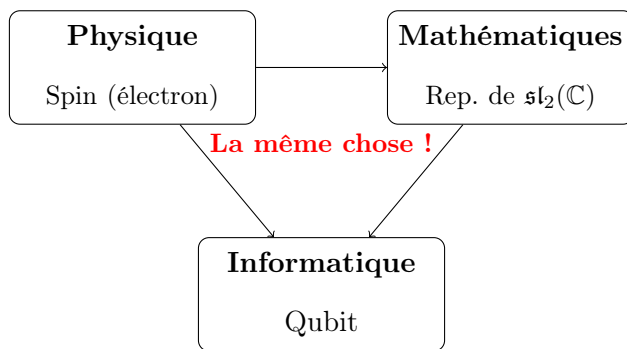
$$v = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients complexes. Cette combinaison est un élément d'un espace vectoriel hermitien de dimension 2, avec  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  comme base orthonormée, et  $\|v\| = 1$ .

Je vais expliquer ce que cela signifie mathématiquement et comment travailler avec de tels objets.

## Objectif de l'exposé

L'objectif de cet exposé est de lier les concepts de la physique, des mathématiques et de l'informatique, en mettant en évidence leur correspondance avec les qubits et le spin.



## Introduction à la mécanique quantique

Dans cet exposé, nous considérons le cas **fini**. En **mécanique classique**, un système (classique) est décrit par un ensemble fini  $X$  ayant  $n$  éléments :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Les éléments  $x_r$  sont appelés **états** (classiques) du système.

En **mécanique quantique**, au lieu d'un ensemble  $X$ , le système est décrit par un **espace vectoriel hermitien**  $V$  de dimension  $n$ . Cet espace est muni d'une base orthonormée formée des états classiques :

$$|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_n\rangle.$$

Contrairement au cas classique, on autorise des **combinaisons linéaires complexes** des états de base. Un **état quantique** d'un système quantique est un vecteur  $v \in V$  tel que  $\|v\| = 1$ . Autrement dit, un état quantique s'écrit sous la forme

$$v = \alpha_1|x_1\rangle + \alpha_2|x_2\rangle + \dots + \alpha_n|x_n\rangle$$

avec  $\alpha_r \in \mathbb{C}$  et  $\sum_{r=1}^n |\alpha_r|^2 = 1$ .

Ainsi, à chaque système classique à  $n$  états ( $\#X = n$ ), on peut associer un système quantique avec  $\dim V = n$ , les éléments de  $X$  donnent une base orthonormée de  $V$ . Mais quand on regarde le système quantique en lui-même, il faut plutôt penser que  $V$  n'a aucune base privilégiée, et chaque base orthonormée de  $V$  peut être considérée comme un système classique qui donne ce système quantique.

## Peut-on connaître l'état du système ?

Dans le cas classique, il est possible de savoir dans quel état  $x_r$  se trouve le système.

En mécanique quantique, l'état est un vecteur  $v = \sum_{r=1}^n \alpha_r |x_r\rangle$  avec  $\|v\| = 1$ , mais il n'est pas possible de connaître directement ce vecteur. On peut seulement effectuer des mesures, qui donnent des informations partielles sur  $v$ .

- Lors d'une mesure dans la base  $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_n\rangle$ , le résultat obtenu est l'un des  $x_r$  avec une probabilité donnée par  $|\alpha_r|^2$ .
- Après la mesure, l'état  $v$  du système est remplacé par  $|x_r\rangle$  : c'est ce que l'on appelle un **saut quantique** (« quantum jump »).

Ainsi, la mécanique quantique diffère profondément de la mécanique classique : on ne voit pas directement  $v$ , mais on peut faire des choses (mesures) avec.

## Mesure dans une autre base

Dans l'exemple précédent, la mesure a été faite dans la base  $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_n\rangle$ . Mais un **système quantique** n'a pas de base privilégiée. On peut choisir **n'importe quelle base orthonormée**  $|y_1\rangle, |y_2\rangle, \dots, |y_n\rangle$  de  $V$  et effectuer la mesure dans cette base.

- Le résultat sera l'un des  $y_r$  avec une probabilité égale à  $|\langle y_r | v \rangle|^2$ .
- Après la mesure, l'état  $v$  du système est remplacé par  $|y_r\rangle$ .

## Observable classique et observable quantique

En **mécanique classique**, un **observable** est simplement une application  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Comme on peut connaître exactement l'état  $x \in X$ , on peut directement calculer  $f(x)$ .

En **mécanique quantique**, un **observable** est défini comme un **opérateur autoadjoint** (ou hermitien)  $\hat{f} : V \rightarrow V$ .

À chaque observable classique  $f$  on peut associer un observable quantique  $\hat{f}$  par :

$$\hat{f}: V \rightarrow V, \quad \hat{f}(|x_r\rangle) = f(x_r)|x_r\rangle.$$

Donc  $|x_r\rangle$  est un **vecteur propre** de  $\hat{f}$  avec valeur propre  $\lambda_r = f(x_r)$ .

## Mesurer un observable

Pour un système classique, « mesurer » un observable  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  veut juste dire « calculer  $f(x)$  ». Il n'y a pas de problème : on connaît  $f$ , on connaît l'état  $x \in X$  du système, on peut donc calculer  $f(x)$ .

Pour un système quantique, on connaît l'observable  $\hat{f}: V \rightarrow V$  que l'on veut mesurer, mais on ne connaît pas directement l'état  $v \in V$  du système. Donc, que veut dire « mesurer  $\hat{f}$  » ?

**Cas 1.** L'observable  $\hat{f}$  provient d'un observable classique  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  avec toutes les valeurs  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  distinctes.

Dans ce cas,  $\hat{f}$  est diagonalisable dans la base  $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_n\rangle$  avec des valeurs propres toutes différentes :

$$\hat{f}(|x_r\rangle) = f(x_r)|x_r\rangle.$$

- La mesure donne la réponse  $f(x_r)$  avec probabilité  $|\alpha_r|^2$ .
- Après la mesure, l'état  $v$  du système est remplacé par  $|x_r\rangle$ .

**Cas 2.** L'observable  $\hat{f}$  provient d'un observable classique  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , mais les valeurs  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  ne sont pas toutes distinctes. Pour chaque valeur propre  $\lambda$ , l'espace propre associé est

$$V_\lambda = \text{Span}\{|x_r\rangle \mid f(x_r) = \lambda\}.$$

- La mesure donne la réponse  $\lambda$  avec probabilité égale à la somme des  $|\alpha_r|^2$  pour tous les  $r$  tels que  $f(x_r) = \lambda$  :

$$\mathbb{P}(\lambda) = \sum_{f(x_r)=\lambda} |\alpha_r|^2.$$

- Après la mesure, l'état  $v$  du système est remplacé par la projection normalisée de  $v$  sur  $V_\lambda$ .

**Cas 3.** (cas général) Même si  $\hat{f}$  ne provient pas d'un observable classique dans la base  $|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_n\rangle$ , il existe toujours une base orthonormée dans laquelle il est diagonal. On peut donc imaginer que  $\hat{f}$  provient d'un observable classique, mais dans une autre base orthonormée.

L'observable  $\hat{f}$  est un opérateur autoadjoint quelconque. Pour chaque valeur propre  $\lambda$ , on considère l'espace propre  $V_\lambda = \{w \in V \mid \hat{f}(w) = \lambda w\}$ .

- La mesure donne la réponse  $\lambda$  avec une probabilité égale à  $\|pr_\lambda(v)\|^2$  (le carré de la norme de la projection de  $v$  sur  $V_\lambda$ ).
- Après la mesure, l'état  $v$  du système est remplacé par  $\frac{pr_\lambda(v)}{\|pr_\lambda(v)\|}$  (la projection normalisée de  $v$  sur  $V_\lambda$ ).

*Remarque :* après avoir considéré le Cas 3, on peut revenir au Cas 1 et observer qu'en réalité, l'état du système ne saute pas exactement sur  $|x_r\rangle$ , mais sur  $\frac{\alpha_r}{\|\alpha_r\|}|x_r\rangle$ . La différence

entre ces deux vecteurs est une multiplication par  $e^{i\theta}$  pour un certain  $\theta \in \mathbb{R}$ , ce qui n'a aucune conséquence physique, car une telle multiplication n'affecte pas les probabilités mesurées. C'est pourquoi les physiciens ignorent souvent cette différence, même si elle est bien présente d'un point de vue mathématique.

## Spin (électron)

Un exemple physique fondamental d'un système quantique est donné par le **spin de l'électron**. En plus de la masse et de la charge électrique, l'électron possède une propriété purement quantique appelée **spin**.

On dit parfois que, pour un électron, le spin peut prendre uniquement deux états (classiques) possibles. Les états de base sont traditionnellement notés  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$ , que l'on appelle respectivement **état spin up** et **état spin down**.

Tout état (quantique) possible du spin de l'électron est une combinaison linéaire

$$v = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \in V \simeq \mathbb{C}^2,$$

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Il faut remarquer que la base de  $V$  donnée par  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$  est juste un choix spécifique d'une base ; cette base n'est pas meilleure que toute autre base orthonormée.

Le spin ne doit pas être interprété comme une véritable flèche pointant vers le haut ou le bas. On peut imaginer qu'il existe un certain **vecteur caché** dans  $\mathbb{R}^3$  (à ne pas confondre avec  $v \in \mathbb{C}^2$ ), mais il est impossible d'y accéder directement (on peut même douter de son existence réelle). On peut uniquement effectuer des mesures de projections sur des axes donnés.

Expérimentalement, on peut mesurer la projection du « vecteur caché » sur un axe fixé (par exemple l'axe  $Ox$ ,  $Oy$  ou  $Oz$ ). À chaque mesure, le résultat est toujours l'une des deux valeurs possibles :  $+1$  ou  $-1$ . (Parfois, les physiciens divisent par 2 et parlent de  $+1/2$  et  $-1/2$ .)

Une fois la projection mesurée (par exemple sur l'axe  $Ox$ ), si on répète immédiatement la même mesure, le résultat reste inchangé. Mais si on mesure ensuite la projection sur un autre axe perpendiculaire (par exemple  $Oy$ ), le résultat sera à nouveau soit  $+1$ , soit  $-1$  avec probabilité exactement  $1/2$  pour chacune des deux valeurs possibles.

Nous voulons maintenant comprendre comment ce phénomène est décrit mathématiquement. L'état du spin de l'électron est représenté par un vecteur dans  $\mathbb{C}^2$ . Les mesures sont représentées par des opérateurs hermitiens (observables) agissant sur cet espace. Dans le cas du spin de l'électron, ces opérateurs sont donnés par les **matrices de Pauli** :

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de Pauli sont des observables qui correspondent à la mesure de la projection du « vecteur caché » sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$  ou  $Oz$  respectivement. Chaque matrice possède deux valeurs propres :  $+1$  et  $-1$ .

Nous pouvons maintenant donner une interprétation géométrique plus précise. Les états  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$  sont définis comme états propres de  $\sigma_Z$  :

$$\sigma_Z|\uparrow\rangle = +1 \cdot |\uparrow\rangle, \quad \sigma_Z|\downarrow\rangle = -1 \cdot |\downarrow\rangle.$$

Autrement dit,

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, les états propres de  $\sigma_X$  sont appelés **état spin à droite** et **état spin à gauche** :

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De façon générale, si on veut mesurer la projection du « vecteur caché » sur une direction donnée, spécifiée par un vecteur unitaire  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  avec  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , l'observable associée est donnée par

$$\hat{f} = \alpha \sigma_X + \beta \sigma_Y + \gamma \sigma_Z.$$

C'est un opérateur hermitien dont les valeurs propres sont  $+1$  et  $-1$ . L'état du système après la mesure est alors un vecteur propre de  $\hat{f}$  correspondant à la valeur mesurée.

*Remarque :* Il ne faut pas penser que, dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , le « vecteur caché » est orienté vers le haut. Il faut plutôt penser que, dans l'état  $|\uparrow\rangle$ , la projection du vecteur caché sur l'axe  $Oz$  est définitivement  $+1$ . (Quant aux projections sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ , elles correspondent à des superpositions quantiques des valeurs  $\pm 1$ , chacune apparaissant avec une probabilité de  $1/2$ .)

On peut aussi remarquer que chaque vecteur non nul  $v \in V \simeq \mathbb{C}^2$  est un vecteur propre d'un opérateur de la forme  $\alpha \sigma_X + \beta \sigma_Y + \gamma \sigma_Z$ . Donc, pour chaque état  $v \in V$  du système, il existe un axe tel que la projection sur cet axe soit définitivement  $+1$ .

## Origine algébrique des matrices de Pauli

Le groupe  $SU(2)$  est le revêtement universel à deux feuillets du groupe  $SO(3)$ . Au niveau des algèbres de Lie, on a  $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ . Il est classique que  $\mathfrak{so}(3) \simeq (\mathbb{R}^3, \times)$ , où  $\times$  est le produit vectoriel usuel. En même temps, la complexification donne  $\mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

On a donc :

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \text{complexification de } (\mathbb{R}^3, \times).$$

La base canonique de  $\mathbb{R}^3$  donne une base  $(h_X, h_Y, h_Z)$  de  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , telle que

$$[h_X, h_Y] = h_Z, \quad [h_Y, h_Z] = h_X, \quad [h_Z, h_X] = h_Y. \quad (*)$$

Pour des choix appropriés des isomorphismes, on a :

$$h_X = \frac{1}{2i} \sigma_X, \quad h_Y = \frac{1}{2i} \sigma_Y, \quad h_Z = \frac{1}{2i} \sigma_Z.$$

Une **représentation de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$**  est un espace vectoriel  $V$  muni d'une action linéaire de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Autrement dit, une telle représentation consiste en un espace vectoriel  $V$  muni de trois opérateurs  $h_X, h_Y, h_Z : V \rightarrow V$  vérifiant les relations (\*).

Cependant, on choisit souvent une autre base standard de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  :

$$h := \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e := \frac{1}{2}(\sigma_X + i\sigma_Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \frac{1}{2}(\sigma_X - i\sigma_Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments vérifient les relations de commutation classiques :

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

La classification des représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  est bien connue : elles sont indexées par des entiers naturels  $n \geq 0$  et on les note  $L(n)$ . La représentation  $L(n)$  est de dimension  $n+1$ . Une base naturelle de  $L(n)$  est constituée de vecteurs  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  sur lesquels l'action de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  s'écrit :

$$h \cdot v_k = (n - 2k)v_k, \quad e \cdot v_k = (n - k + 1)v_{k-1}, \quad f \cdot v_k = (k + 1)v_{k+1},$$

avec la convention  $v_{-1} = v_{n+1} = 0$ . La représentation  $L(1)$  est le cas particulier de dimension 2, qui correspond au  $\mathbb{C}^2$  habituel : c'est la **représentation canonique** de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

En physique, on attache à chaque particule massive une représentation de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Si la particule est associée à la représentation  $L(n)$ , on dit que la particule a un **spin** égal à  $n/2$ .

Ainsi, à chaque particule massive est associée une certaine représentation  $L(n)$  :

- À l'électron est associée  $L(1) \Rightarrow \text{spin } 1/2$ .
- Aux bosons  $W^\pm$  et  $Z$  (interaction faible) est associée  $L(2) \Rightarrow \text{spin } 1$ .
- À certaines particules (ex. :  $\Delta$ -baryons) est associée  $L(3) \Rightarrow \text{spin } 3/2$ .
- Au boson de Higgs est associée la représentation triviale  $L(0) \Rightarrow \text{spin } 0$ .

**Remarque.** En informatique quantique, on parle de **qubit** avec deux états :  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . En physique, le spin d'un électron est aussi un système à deux états ( $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ), mais il existe une structure supplémentaire : les projections possibles sur les axes  $Ox, Oy, Oz$ .

Pour les qubits, cette géométrie semble absente. En réalité, elle est automatiquement présente : tout espace hermitien complexe de dimension 2 est unique (à isomorphisme près), et le groupe  $SU(2)$  agit naturellement. Le groupe  $SU(2)$  recouvre  $SO(3)$ , d'où apparaît la structure tridimensionnelle et les opérateurs  $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ .

**Conclusion :** toute description mathématique possible d'un qubit est équivalente à celle du spin d'un électron. Il n'existe pas d'autre système quantique à deux états non équivalent à celui-là.